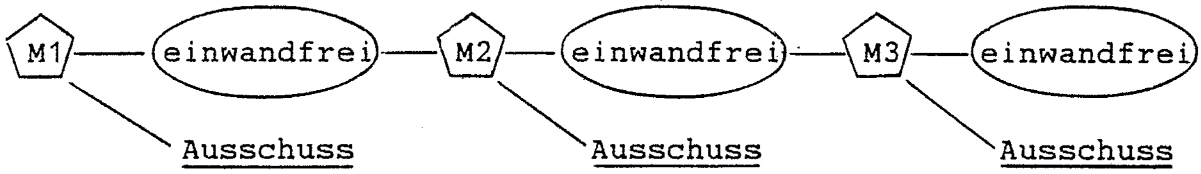
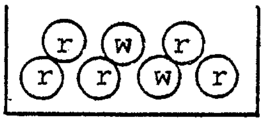
2. MEHRSTUFIGE ZUFALLSVERSUCHE

<u>Beispiel 1</u>: Ein Fertigungsteil in einer Fabrik durchläuft drei Maschinen mit den Ausschussquoten 5%, 2% und 4%. Wie hoch ist die gesamte Ausschussquote ? (Bestimme zunächst den Anteil der einwandfreien Stücke.)

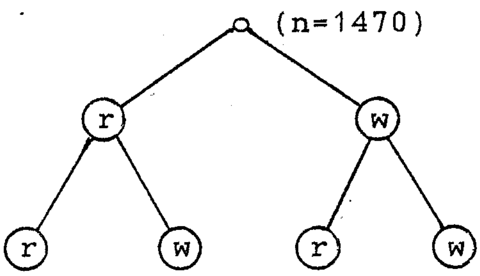


<u>Beispiel 2</u>: Aus nebenstehender Urne werden zwei Kugeln gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind beide Kugeln rot ?
Ist es wahrscheinlicher zwei rote oder nicht zwei rote Kugeln zu ziehen ?



Der Versuch kann auf zwei verschiedene Arten durchgeführt werden: a) mit Zurücklegen der gezogenen Kugel
b) ohne Zurücklegen der gezogenen Kugel (d.h. wir können beide Kugeln mit einem Griff ziehen.)

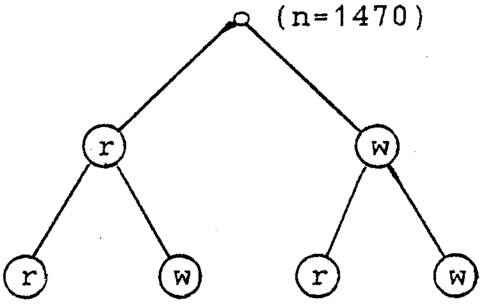
a) mit Zurücklegen der gezogenen Kugel; der zweite Zug ist also unabhängig vom Ergebnis des ersten Zuges.



r,r	r,w	w,r	w,w

<u>Folgerung</u>:

b) ohne Zurücklegen der gezogenen Kugel; der zweite Zug ist also abhängig vom Ergebnis des ersten Zuges.



r,r	r,w	w,r	w,w

<u>Folgerung</u>:

Aus n einstufigen Zufallsversuchen hintereinander entsteht ein **n-stufiger Zufallsversuch.** Dieser hat ein n-Tupel $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ als Ausfall.

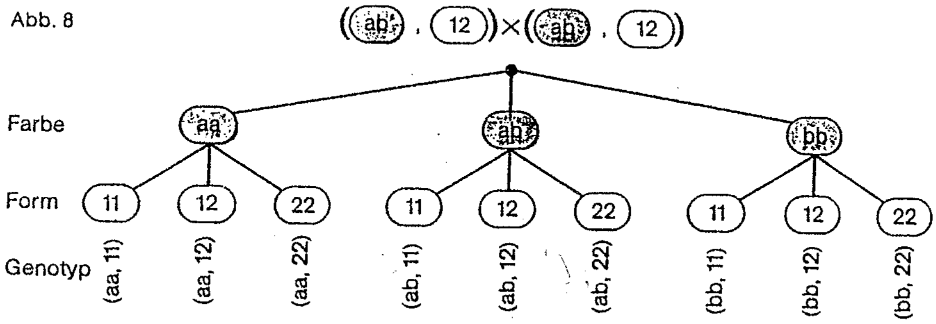
Jeder Ausfall eines mehrstufigen Zufallsversuchs entspricht genau einem **Pfad** im zugehörigen **Baum**; und es gilt die

1. **PFADREGEL: In einem mehrstufigen Zufallsversuch ist die Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls das Produkt der Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades.**

Beispiel 3:

Beobachtet man bei einer Kreuzung gleichzeitig zwei gemischterbige Genotypen, z. B. Farben a, b und Formen 1, 2, dann findet man in der Tochtergeneration 9 Genotypen:

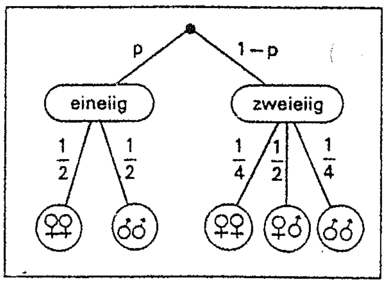
Abb. 8



Die Wahrscheinlichkeiten der Genotypen sind in der Tabelle angegeben. Bestätigen Sie diese Zahlen!
Dies ist die 3. Mendelsche Regel.

	11	12	22
aa	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
ab	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
bb	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

Beispiel 4: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Zwillingspaar eineiig ist, sei p. Statistische Erhebungen haben ergeben, dass etwa 1/3 aller Zwillinge von unterschiedlichem Geschlecht sind. Daraus kann man anhand des Wahrscheinlichkeitsbaums den Wert p berechnen.



Beispiel 5: Mit einem Laplace-Würfel wird gewürfelt.

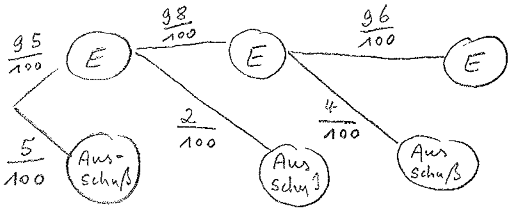
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei fünfmaligem Würfeln die Augenzahl "6" nicht auftritt ?
b) Wie oft muss gewürfelt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine "6" zu würfeln, mehr als 99% beträgt?
c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint die erste "6" erst nach dem 10. Wurf ?
d) Die beiden Spieler A und B würfeln abwechslungsweise, bis einer eine "6" würfelt. A beginnt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft A die "6" ?

Mehrstufige Zufallsversuche

LÖSUNGEN der Beispiele 1 – 5

Bsp 1:

E: einwandfrei A: Ausschuß $P(\bar{A}) = 0{,}89376$



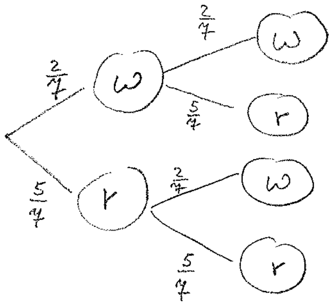
$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0{,}8937 = \underline{0{,}1062}$

Ausschußquote ist also $\approx 10\,\%$

Bsp 2:

a) mit Zurücklegen (mit Wdh.)

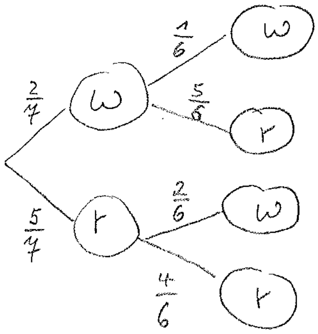
E: 2 mal „rot" bei 2 Zügen



$\Rightarrow P(E) = \frac{5}{7} \cdot \frac{5}{7} = \frac{25}{49} = \underline{0{,}5102}$

Es ist also wahrscheinlicher „2 rote" Kugeln zu ziehen als „nicht zwei rote".

b.) ohne Wiederh.



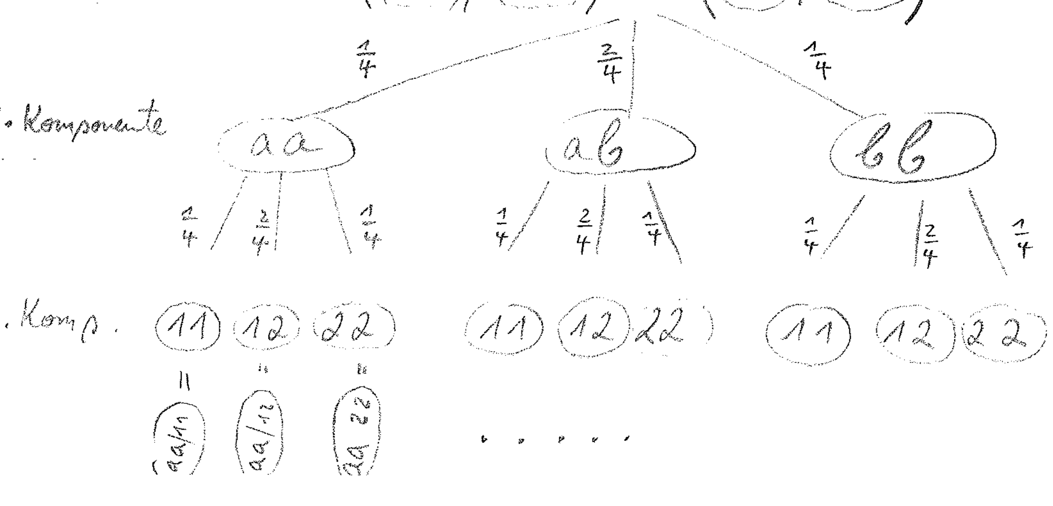
E: "beide Kugeln sind rot"

$\Rightarrow P(E) = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{20}{42} = \underline{0{,}4761}$

Ohne Zurücklegen
ohne Wdh ist es wahrscheinlicher „nicht zwei rote" zu ziehen als „zwei rote"

Bsp 3: 3. Mendelsche Regel

$((ab)/(12)) \times ((ab)/(12))$

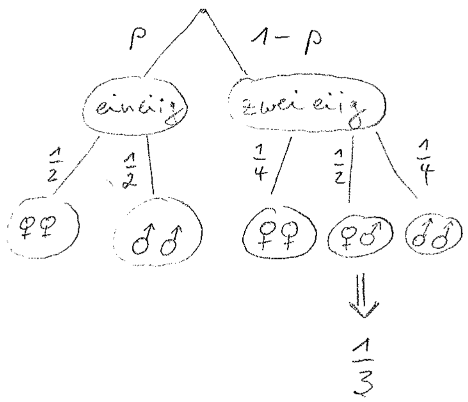


Der gemischte Fall kann auf 2 versch. Arten entstehen: ab oder ba $\Rightarrow \frac{2}{4}$ W'keit

Somit W'keiten wie in Tabelle

z.B. $P(aa/11) = \frac{1}{16}$ etc.

Bsp 4:



E: Zwillinge unterschiedl. Geschlechts

Wir wissen: $P(E) = \frac{1}{3}$

Somit $(1-p)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \quad |\cdot 2 \iff$

$\iff 1 - p = \frac{2}{3}$

$1 - \frac{2}{3} = p \implies p = \frac{1}{3}$

Bsp 5:

a) E: keine 6 bei 5 maligem würfeln $\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}4018$

---

b) E: mindestens 1 × 6 mit 1 Würfel $\Rightarrow \bar{E}$: keine 6

P(E) soll > 99% sein. Wie oft muß man werfen?

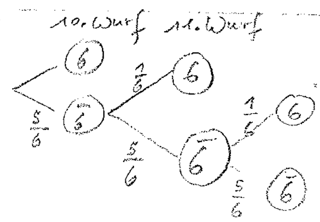
$\boxed{P(E) = 1 - P(\bar{E})}$ $\quad P(\bar{E}) < \frac{1}{100} \implies \left(\frac{5}{6}\right)^n < \frac{1}{100} \quad | \ln$

$\implies n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) < \ln\frac{1}{100} \quad | : \ln\frac{5}{6} < 0$

$n > \frac{\ln\frac{1}{100}}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = 25{,}258 \implies$ ab 26 Wurf ist $P(E) > 99\%$

---

c) …



E_1: 10 × keine 6 $\quad P(E_1) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0{,}1615$

E_2: 11 × keine 6 $\quad P(E) = \left(\frac{5}{6}\right)^{11} = 0{,}1345$

E: erste Sechs erst nach 10 ter Wurf

$$P(E) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{11}\cdot\frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^{12}\cdot\frac{1}{6} + \ldots = \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{10+k} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\frac{5}{6}^{k} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot\frac{1-\frac{5}{6}^{n}}{1-\frac{5}{6}} =$$

für $n \to \infty$ $\implies P(E) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\cdot 6 = 0{,}1615$ → „einfacher" mit Gegenereignis.