

Einführungsbeispiel zum Erwartungswert

Beispiel 1: Adam bietet folgendes Spiel an:

Vor ihm liegen verdeckt 5 Spielkarten. Es gibt drei Damen, ein König und ein Ass.

Der Einsatz für ein Spiel ist 1 Franken. Man darf eine Karte aufdecken.

Wird eine Dame aufgedeckt, erhält der Mitspieler 0 Fr. ausgezahlt.

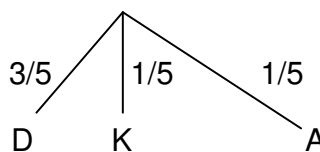
Wird ein König aufgedeckt, erhält der Mitspieler 3 Fr. ausgezahlt.

Wird das Ass aufgedeckt, erhält der Mitspieler 5 Fr. ausgezahlt.

- Stelle das Spiel in einem Wahrscheinlichkeitsbaum dar.
- Was ist der durchschnittliche Gewinn von Adam pro Spiel?

Lösungen:

a)



- b) Wir wollen Adams Gewinn berechnen und führen hierfür eine Zufallsvariable ein:
 $X :=$ „Gewinn von Adam“

Die sogenannte Verteilung der Zufallsvariablen listet in der folgenden Tabelle auf, in welchen Fällen Adam wie viel Gewinn macht:

Bemerkung: Gewinn = Einnahmen minus Ausgaben

Ereignis w	Dame	König	Ass
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(w)$	$3/5$	$1/5$	$1/5$
Wert der Zufallsvariablen $X(w)$ d.h. „Gewinn von Adam“	+1	$+1 - 3 = -2$	$+1 - 5 = -4$

Der Erwartungswert für Adams Gewinn ist nun:

$$E(\text{Adams Gewinn}) = E(X) = \frac{3}{5} \cdot (+1) + \frac{1}{5} \cdot (-2) + \frac{1}{5} \cdot (-4) = -\frac{3}{5}$$

Somit macht Adam pro Spiel im Durchschnitt $-3/5$ „Gewinn“ d.h. 60 Rappen Verlust.

Fachbegriffe:

Man nennt den zu erwartenden Wert „**Erwartungswert**“ (Merke: „Erwartung mal Wert“)

Die **Verteilung der Zufallsvariablen** wird am besten in einer Liste oder Tabelle dargestellt.

Weitere Aufgaben:

c) Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen X =“Ausgaben von Adam“

Ereignis w	Dame	König	Ass
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(w)$			
Wert der Zufallsvariablen $X(w)$ d.h.“Ausgaben von Adam“			

$$E(\text{Ausgaben von Adam}) = E(X) =$$

Somit ist der Gewinn von Adam pro Spiel:

d) Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariablen X =“Gewinn vom Mitspieler“

Ereignis w	Dame	König	Ass
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(w)$			
Wert der Zufallsvariablen $X(w)$ d.h.“ Gewinn vom Mitspieler“			

$$E(\text{Gewinn vom Mitspieler}) = E(X) =$$

e) Ist das Spiel fair? Wie gross müsste der Einsatz pro Spiel sein, damit das Spiel fair ist?

Weitere Aufgaben:

- 1 **Berta** bietet folgendes Spiel an: Es werden zwei Münzen geworfen.
 Kommt Zahl / Zahl erhält der Mitspieler 12 Franken.
 Kommt Wappen / Wappen erhält der Mitspieler 5 Franken.
 Ein Spiel kostet 7 Franken
- Würdest Du gegen Berta (längere Zeit) spielen? Begründe Deine Antwort mit Hilfe des Erwartungswertes.
 - Wie viel müsste ein Spiel kosten, damit es fair ist?
- 2 **Carla** spielt in einem Casino mit einem Glücksrad:
- The pie chart is titled "Glücksrad" and is divided into four sectors. The largest sector, labeled '1', is dark grey and represents 40% of the wheel. The second largest sector, labeled '2', is light grey and represents 30%. The third largest sector, labeled '3', is medium grey and represents 20%. The smallest sector, labeled '4', is white and represents 10%.
- Kommt vier erhält sie 10 Franken.
 Kommt drei erhält sie 5 Franken.
 Ein Spiel kostet 2 Franken.
- Macht Carla im Durchschnitt Gewinn?
 - Wie gross ist der „Gewinn“ des Casinos, wenn an einem Abend 5000 Spiele gemacht werden?
 - Wie viel müsste ein Spiel kosten, wenn das Casino pro Spiel 1 Fr. Gewinn machen will?
 - Ein Spiel kostet wieder 2 Franken. Wie gross müsste die Auszahlung für die vier sein, damit das Spiel fair ist ?
- 3 **Dominique** bietet folgendes neues Spiel an: Es werden zwei Würfel geworfen.
 Bei Augensumme 12 erhält der Mitspieler das Zwanzigfache seines Einsatzes zurück.
 Bei Augensumme 11 gibt es das Fünffache des Einsatzes zurück.
 Bei Augensumme 10 gibt es den Einsatz zurück.
 Macht Dominique Gewinn mit diesem Spiel ? Wie viel?
- 4 **Ela** spielt folgendes Spiel: Sie wirft gleichzeitig eine Münze und einen Würfel.
 Kommt bei der Münze die Zahl, so erhält der Mitspieler den Würfelbetrag in Franken ausgezahlt. (Z.B. Zahl und 4 → 4 Franken Auszahlung an den Mitspieler)
 Kommt Wappen, erhält Ela vom Mitspieler jedesmal 1 Franken, egal was der Würfel zeigt.
- Ist das Spiel fair?
 - Welchen Betrag müsste der Mitspieler an Ela geben, damit das Spiel fair ist ?

Lösungen:**Beispiel 1c)** $E(\text{Ausgaben von Adam}) = E(X) = - 8/5$ Adams Gewinn ist Einnahmen minus Ausgaben: $1 - 8/5 = -3/5$

d.h. Adam macht durchschnittlich einen Verlust von 60 Rappen pro Spiel.

1d) $E(\text{Gewinn Mitspieler}) = E(X) = + 3/5$

Der Mitspieler macht durchschnittlich einen Gewinn von 3/5 pro Spiel

d.h. Adam macht durchschnittlich einen Verlust von 3/5 Rappen pro Spiel.

1e) Nein, das Spiel ist unfair.

Der Gewinn von Adam sollte 0 sein, damit das Spiel fair ist. Also muss gelten:

$$x - 8/5 = 0 \rightarrow x = 8/5$$

Wenn Adam $8/5 = 1,6$ Fr. pro Spiel verlangt ist das Spiel fair.**Aufgabe 1 Berta:** $E(\text{Gewinn von Berta}) = E(X) = 1/4 (-5) + 2/4 (7) + 1/4 (2) = 2,75$

a) Nein, ich würde nicht gegen sie spielen, da sie im Schnitt 2,75 Fr. pro Spiel gewinnt.

b) Ansatz: $E(\text{Ausgaben von Berta}) = E(X) = 1/4 (-12) + 2/4 (0) + 1/4 (-5) = - 17/4$ Ein Spiel müsste also nur $- 17/4 = 4$ Fr. 25 Rappen kosten.**Aufgabe 2 Carla:** $E(\text{Einnahmen Carla}) = 20 / 12 = 1,67$ Fr.a) Der „Gewinn“ von Carla ist $- 2$ Fr. $+ 1,67$ Fr. $= - 1/3$ Fr. pro Spiel (d.h. Verlust).

b) Gewinn des Casinos = 1666,67 Fr. pro Abend.

c) $E(X) = 1/6 (5) + 1/12 (10) = x - 1 \rightarrow$ Einsatz $x = 32/12 = 2,67$ Fr.

Das Casino macht nun 1 Fr. Gewinn pro Spiel.

d) Ansatz aus Sicht vom Casino: Einnahmen minus Ausgaben = 0

$$2 - \left(\frac{2}{12} \cdot 5 + \frac{1}{12} \cdot x \right) = 0 \rightarrow x = 14 \text{ Franken müsste für die „vier“ ausgezahlt werden.}$$

Aufgabe 3 Dominique:

X ="Ausgaben von Dominique" und E sei der Einsatz pro Spiel.

Somit ist $E(X) = 1/36 (20 E) + 2/36 (5E) + 3/36 (1E) = 33/36 E$

Gewinn von Dominique ist also: $G = E - 33/36 E = 3/36 E$ Sie macht also pro Spiel im Durchschnitt 0.083 des Einsatzes Gewinn.

Z.B. bei 10 Fr. Einsatz macht sie ungefähr 83 Rappen Gewinn.

Aufgabe 4 Ela:

Ereignis w	Zahl / 1	Zahl / 2	Z/3	Z/4	Z/5	Z/6	W	
Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $P(w)$	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2	
Wert der Zufallsvariablen $X(w)$ d.h. "Gewinn von Ela"	-1	-2	-3	-4	-5	-6	1	

a) $E(X) = 1/12 (-1-2-3-4-5-6) + 1/2 (+1) = -1,75 + 0,5 = -1,25$ Fr. Ela macht Verlust.

b) Ansatz: X ="Gewinn von Ela" und b = Betrag den der Mitspieler an Ela geben muss.

$$E(X) = 1/12 (-1-2-3-4-5-6) + 1/2 (b)$$

$$E(X) = 0 \text{ setzen } \rightarrow -1,75 + 1/2 (b) = 0 \rightarrow b = 3,5$$

Der Mitspieler müsste Ela 3,5 Franken geben, damit das Spiel fair ist,