Lernziele zu Quadratischen Gleichungen

1 Einführung „Quadratische Gleichungen“ mit Übungsaufgaben

a. Anwenden von Faktorisieren

b. Quadratische Ergänzung und Wurzel ziehen

c. Mit Lösungsformel:
Wenn die allgemeine Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ nach x aufgelöst werden soll, so können wir die „Mitternachtsformel“ anwenden:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

d. Weitere Übungen im Buch:“Mathematik für Mittelschulen“
ab S. 93

Nummern:
261
265 a) – f)
275
276 a) b) f)
280
281
285

Quadratische Gleichungen

Welche x erfüllen die folgende Gleichung?

$x^2 + 8 = 6x$

Es existieren verschiedene Lösungsansätze:

Faktorisieren

Lösungsansatz:

- Alle Terme auf eine Seite bringen
- In ein Produkt (also zwei Klammern) verwandeln
- Die einzelnen Klammerausdrücke gleich Null setzen

Beispiel:

$$\begin{aligned} x^2 + 8 &= 6x \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \\ (x-2)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

Die linke Seite ist ein Produkt. Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren, also entweder $x-2$ oder $x-4$ gleich Null sind. Dies ist für $x = 2$, bzw. $x = 4$ der Fall.

Wurzel ziehen

Betrachten wir zuerst ein einfaches Beispiel: $x^2 = 4$. Wenn wir hier auf beiden Seiten die Wurzel ziehen, erhalten wir $x = 2$. Allerdings ist auch $x = -2$ eine Lösung der Gleichung. Beim Wurzelziehen auf beiden Seiten der Gleichung muss man deshalb immer auch die negative Lösung berücksichtigen. Wir schreiben dann abgekürzt $x = \pm 2$ (mehr dazu in der Stunde).

Die Anwendung auf das obige Beispiel erfordert etwas Vorbereitung. Um die Wurzel effektiv ziehen zu können, müssen wir zuerst eine Seite der Gleichung mit Hilfe der binomischen Formeln in ein Quadrat verwandeln. (Denkschritte siehe Pfeile)

$$\begin{aligned} x^2 + 8 &= 6x \\ x^2 - 6x &= -8 \qquad \mid +9 \\ x^2 - 6x + 9 &= -8 + 9 \\ (x-3)^2 &= 1 \end{aligned}$$

Anschliessend kann man auf beiden Seiten die Wurzel ziehen:

$$\begin{aligned} (x-3)^2 &= 1 \\ x - 3 &= \pm 1 \\ x &= 3 \pm 1 \end{aligned}$$

Aus der letzen Zeile folgt $x = 2$ und $x = 4$, je nachdem ob man plus oder minus rechnet.

Lösungsformel

Für das Lösen von quadratischen Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$, wobei a, b, c irgendwelche Zahlen sind, existiert eine Lösungsformel (die Herleitung werden wir in der Stunde durchführen). In der Literatur wird diese manchmal auch als Mitternachtsformel bezeichnet:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Bringen wir zuerst wieder alles auf eine Seite:

$$\begin{aligned} x^2 + 8 &= 6x \\ x^2 - 6x + 8 &= 0 \end{aligned}$$

Wenn wir die untere Zeile mit $ax^2 + bx + c = 0$ vergleichen, dann sehen wir, dass $a = 1$, $b = -6$ und $c = 8$ gilt. Beim Einsetzen in die Formel erhält man $x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = 3 \pm 1$ also wieder $x = 2$ und $x = 4$.

Übungen

1. Löse mit Faktorisieren:
   a. $x^2 - 8x + 15 = 0$
   b. $x^2 + 1 = 2x$
   c. $2x^2 - 32 = 0$

2. Löse mit Wurzel ziehen:
   a. $x^2 = 9$
   b. $x^2 - 4x + 4 = 9$
   c. $x^2 - 2x = 3$
   d. $x^2 + 18x = 3 + 2x$

3. Löse mit der Lösungsformel:
   a. $2x^2 - 8x + 6 = 0$
   i. $2x^2 - 8x + 8 = 0$
   ii. $2x^2 - 8x + 10 = 0$
   b. $4x^2 - 5x = -1$
   c. $4x^2 - t \cdot x = -1$
   Für welche Werte von t gibt es keine (eine , zwei) Lösungen?

Lösungen

zu 1 a) $(x-3)\cdot(x-5)=0$

$\Rightarrow x_1 = 3 \qquad x_2 = 5$

b) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-1)\cdot(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 1$

c) $2\cdot(x^2 - 16) = 0$

$2\cdot(x-4)(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \quad x_2 = -4$

---

2 a) $x_{1/2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3 \qquad x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

b) $x^2 - 4x + 4 = 9$ | Quadratisch ergänzen ist nicht nötig, sofort in Binom verwandelbar

$(x-2)^2 = 9 \quad |\sqrt{\ }$

$x - 2 = \pm 3 \quad |+2$

$x_1 = 5 \qquad x_2 = -1$

c) $x^2 - 2x = 3$ | Quadratisch ergänzen mit + 1

$x^2 - 2x + 1 = 4$

$(x-1)^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$

$x - 1 = \pm 2 \quad |+1 \Rightarrow x_1 = 3$

$x_2 = -1$

– 2 –

② d)

$$x^2 + 16x = 3 \quad | +64$$

$$x^2 + 16x + 64 = 67 \quad \mathrm{III}$$

$$(x+8)^2 = 67 \quad | \sqrt{}$$

$$x + 8 = \pm\sqrt{67} \quad | -8$$

I, II

$x_1 = -8 + \sqrt{67}$ $\qquad$ $x_2 = -8 - \sqrt{67}$

③ a) $x_{1/2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} \Rightarrow x_1 = \quad x_2 =$

TIPP: Kürzen vorher bringt's ☺

b) $x_{1/2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} \Rightarrow x_1 = \quad x_2 =$

c) $x_{1/2} = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$

Falls $t^2 - 16 < 0$ d.h. $t^2 < 16 \quad | \sqrt{}$

$-4 < t < 4 \Rightarrow$ keine Lösung

Falls $t = \pm 4 \Rightarrow$ genau eine Lösung $x = \frac{1}{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}$

Falls $t > 4$ oder $t < -4 \Rightarrow$ zwei Lösungen: $x_1 = \ldots$ $x_2 = \ldots$