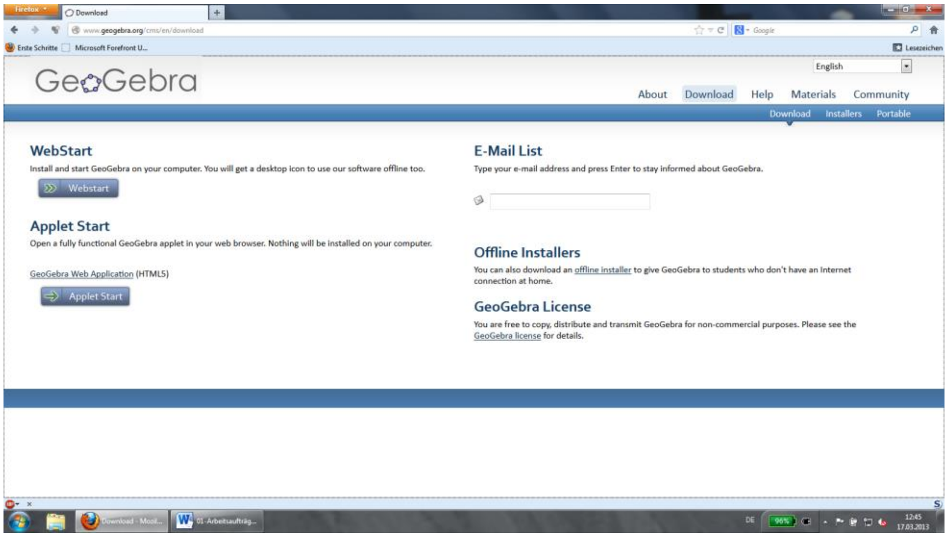
Einführung in die Software Geogebra

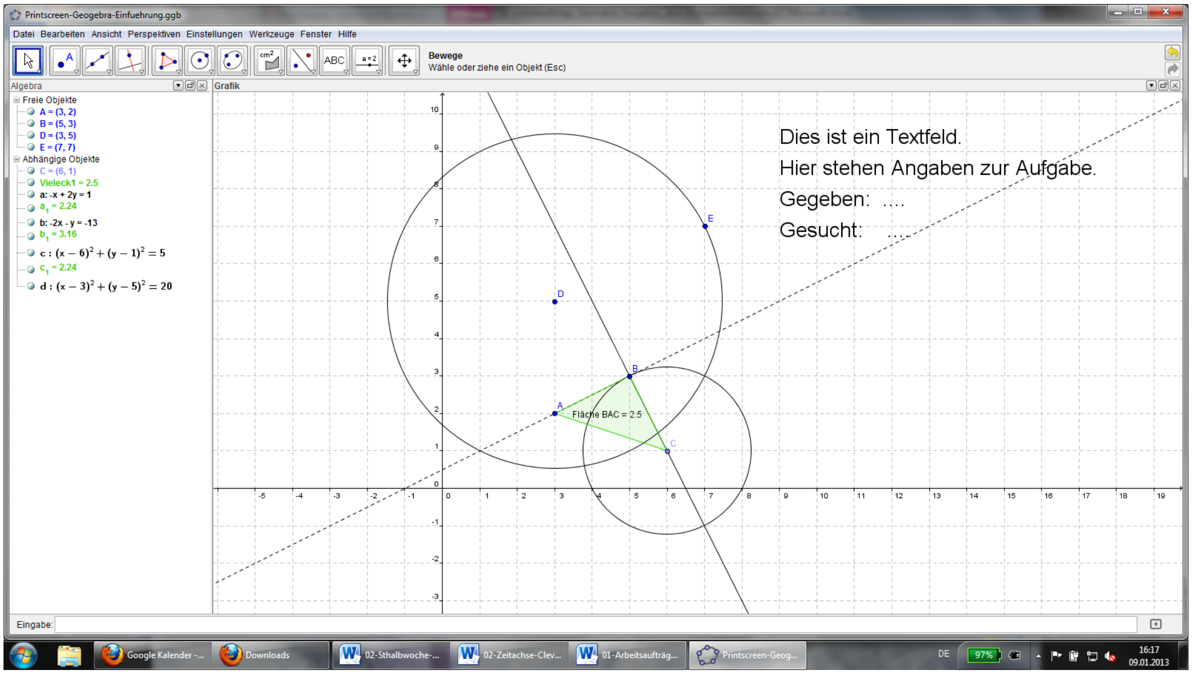
und Forschungsaufgaben zu verschiedenen Sätzen und Beweisen

Installiere die Freeware „Geogebra“ auf deinen Computer.

http://www.geogebra.org → Downloads → Webstartmodul → folge den Anweisungen



Starte Geogebra. Nun solltest du diesen Benutzerbildschirm sehen:



Die folgenden 3 Seiten führen Dich durch einige Möglichkeiten von Geogebra:

Erzeugen von Objekten: Z. Bsp.: Punkte, Geraden, Vielecke, Kreise, …

Klicke z.B: auf die linke obere Schaltfläche „Punkt A“ und klicke dann in das Zeichenfeld. Das gewünschte Objekt (also ein Punkt) entsteht in der Graphik-Zeichenfläche. Außerdem wird jedes neue Objekt automatisch benannt und in der linken Spalte („Algebra-Spalte“) angezeigt. Experimentiere mit den Menüs. Beim Klick auf die kleinen Pfeile auf den Schaltflächen erscheinen weitere Optionen.

Längen berechnen:
Erstelle zwei Punkte A und B
Im Menü (5te Schaltfläche von rechts) „Abstand oder Länge“ klicken. Dann die gewünschte Strecke anklicken. Die Länge wird angegeben und erscheint auch in der linkten „Algebra-Spalte“ von Geogebra.

Verziehen von Objekten
Klicke auf die Pfeilschaltfläche und verziehe dann in der Zeichenfläche den Punkt A. Eine der tollen Anwendungen von Geogebra: Man kann Punkte (Objekte) verziehen. Die gesamte daran hängende Konstruktion „geht mit“. (Der berechnete Abstand sollte sich auch mit verändern)

Objekte Umbenennen, Farbe ändern, Linienart ändern, … :
Rechtsklick auf eine Gerade durch AB. → Eigenschaften → … entsprechenden Reiter auswählen und ändern. Man kann den Rechtsklick auch in der linken „Algebra-Spalte“ auf das Objekt machen. Z.B. im Reiter „Darstellung“ → Linienart auf „gestrichelt“ setzen.

Objekte ein- und ausblenden
Erstelle eine Gerade durch AB. Rechtsklick auf die Gerade. → Eigenschaften: Benenne die Gerade um in t. → Farbe: Gib der Geraden t die Farbe Rot.
In der linken „Algebra-Spalte“ kann man auf den Punkt vor dem Objektnamen klicken um Objekte ein- und auszublenden. Dies geht auch in den „Eigenschaften“ des Objekts. (Haken setzen bei „Objekt anzeigen“ oder kein Haken setzen.)

Flächen berechnen:
Erstelle ein Dreieck ABC. Erstelle zusätzlich ein Vieleck indem Du im Menü „Vieleck" das Vieleck anklickst und die Punkte ABC verbindest. Gib der Vielecks Fläche die Farbe Grün. Lass Geogebra die Fläche berechnen: Im Menü „Fläche berechnen " das gewünschte Vieleck anklicken. Lass Geogebra alle Winkel vom Dreieck ABC berechnen. (Die Klickreihenfolge der Punkte ist entscheidend)

Textfeld erstellen:
Erstelle ein Textfeld (Schaltfläche „ABC" klicken und in Graphikfläche klicken)
ein Eingabefeld erscheint: Gib dort ein:
Gegeben: Kreis k um M(3/5) mit Radius 5 und Punkt P(7/7)
Gesucht: Tangente an K durch P
Führe die Konstruktion durch.

Bild exportieren:
Markiere deine Konstruktion (mit Textteilen etc.) Klicke auf Datei → Export → Graphikansicht als Bild (.png Format oder.jpg) → Speichern als … (Erstelle einen Ordner für Geogebradateien, in denen die Datei .ggb und evtl. extrahierte Bilder sind) Dieses Bild kann man z.B. in Word einfügen und somit einen Sachverhalt / Beweis verdeutlichen.

Berechnungen in einem Textfeld erstellen lassen
Manchmal möchte man sich eine Nebenrechnung in einem Textfeld anzeigen lassen, um zwei oder mehr Werte miteinander zu vergleichen.

Erstelle die Punkte A,B,C. Lass die Strecken AB und BC berechnen. In der linken Algebra Spalte sind nun die Variablen „abstandAB" und „abstandBC".
Gib nun in der unteren Eingabezeile ein: abstandAB * abstandBC (Dann Enter drücken)
Das Produkt entsteht mit Namen in der linken Algebraspalte. (z.B. Variable a)

Erstelle nun ein <u>Textfeld</u>. Gib ein: „AB * BC =" klicke dann auf die Schaltfläche Objekte. Wähle dir die Variable aus, die Du als Wert anzeigen lassen willst. Also den vorher erstellten Wert a des Produkts der beiden Streckenlängen AB*BC.
Klicke ok und das Textfeld liefert den Text AB * BC = mit dem Wert des Produkts a.

Verziehe nun einen Punkt und der Wert im Textfeld sollte sich auch verändern.

Schieberegler erstellen:

Erstelle einen Schieberegler und nenne ihn k (Evtl. Demonstration vom Lehrer)
Erstelle die Punkte A und B und eine Strecke von A nach B. Diese Strecke nennst du a.
Alle erstellten Objekte erscheinen in der linken Spalte von Geogebra.
Nun klickst du im Menü „Strecke“ auf „Strecke mit fester Länge“ und gibst in das Berechnungsfeld ein: a * k
Klicke nun auf die „Pfeilschaltfläche“ und schiebe den Schieberegler k hin und her. Der Punkt C ist nun der Bildpunkt von B und wird verändert, je nach Streckfaktor k.

Beachte: Man muss während einer Konstruktion zuerst einen Schieberegler erstellen und dann kann man diesen Regler einbeziehen. (Umgekehrt geht es nicht.)

Strecke nun ein Dreieck ABC zentrisch mit Hilfe eines Schiebereglers.
Lass die Bildfläche und die Originalfläche der Dreiecke berechnen:
Hierzu erzeugt man zuerst ein „Vieleck“ vom Originaldreieck und vom Bilddreieck. Diese Flächeninhalte der Vielecke kann man sich von Geogebra berechnen lassen. Rechne nach, dass die Bildfläche sich ver – k^2 –facht.

Versuche auch eine negativen Streckfaktor zu konstruieren. Was passiert mit dem Drehsinn des Bilddreiecks wenn k positiv bzw. negativ ist?

Einfache Grundkonstruktionen:

1. Konstruiere eine Mittelsenkrechte zwischen zwei Punkten A und B
   Nutze eigene Hilfskreise und nicht das Mittelsenkrechtenmenue von Geogebra..
2. Konstruiere eine Tangente an einen Kreis. (Ohne Menue „Tangenten“)
3. Konstruiere eine Winkelhalbierende zwischen zwei Geraden.

Für alle Konstruktionen:
Wenn man in Geogebra eine Konstruktion erstellt hat, kann man im Modus „Pfeil“ (mit Cursor auf die Schaltfläche „Pfeil“ (ganz links) klicken), mit dem Cursor z.B. einen Punkt verziehen. Nur wenn die gesamte Konstruktion richtig gemacht ist, bleibt sie beim Verziehen der entscheidenden Punkte komplett richtig und „geht mit“.
Nur dann ist eine Aussage, die man aus der Konstruktion erkennt, allgemein richtig.

Arbeitsaufträge zur Geometrie mit der Software Geogebra:

Zusammenhänge erforschen, Sätze konstruieren, bestätigen und beweisen:

1. Konstruiere den Satz des Pythagoras
   Färbe die Linien und Flächen übersichtlich.
   Blende am Ende nicht relevante Linien aus.
   Lass Dir die Quadratflächen berechnen und teste durch Verziehen einiger Punkte, ob Deine Konstruktion korrekt ist.
   Beweise den Satz.

2. Konstruiere den Höhensatz (Kathetensatz) und verfahre analog zum Pythagoras.

3. Konstruiere den Inkreis des Dreiecks ABC
4. Konstruiere den Umkreis des Dreiecks ABC
5. Konstruiere den Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC

6. Satz des Thales: Konstruiere einen Thaleskreis und ein Dreieck ABC darin.
   Lass Geogebra alle Winkel vom Dreieck ABC messen.
   Schreibe den Beweis hierzu auf.
   (Tipp: Erkenne gleichschenklige Dreiecke)

Zentrische Streckung, Strahlensätze, Ähnlichkeit:

7. Teile eine Strecke AB mit einem Punkt P, so dass gilt: AP : AB = 3:7

8. Satz vom Schwerpunkt im Dreieck:
   Konstruiere den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC
   Bestätige das Teilverhältnis AS : SMa = 2 : 1, indem du die Teilstrecken messen lässt und das Teilverhältnis ausrechnen lässt.
   Verziehe deine Konstruktion wieder und teste sie.
   Kannst du einen Beweis finden? (Nutze Ähnlichkeit und Strahlenätze)

9. Einem Quadrat der Seite 2.4 ist ein rechtwinkliges Dreieck umbeschrieben, dessen eine Kathete dreimal so lang ist wie die andere. Wie lang sind die Katheten?.Konstruiere dieses Dreieck mit Geogebra.

10. In ein Dreieck ABC mit Seiten 3, 5, 8 soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, dass eine Quadratseite genau auf einer Dreiecksseite liegt und dass das Quadrat die maximal mögliche Fläche hat.

Archimedes: „Störe meine KREISE nicht“:

11. Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden g und h und ein Punkt P, der irgendwo zwischen g und h liegt. Gesucht ist ein Kreis, der die Geraden g und h berührt und der durch den Punkt P geht. Konstruiere es mit Geogebra.

12. Peripheriewinkelsatz: Erstelle einen Kreis K um seinen Mittelpunkt M.
Setze eine Sehne AB auf die Kreislinie. Setze einen beliebigen Punkt C auf die Kreislinie.
a) Lass folgende Winkel berechnen: AMB, ACB, Verziehe Deine Konstruktion und finde den Beweis zum Satz, dass der Mittelpunktswinkel „mü“ doppelt so gross ist wie der Peripheriewinkel „Phi“ (Nutze gleichschenklige Dreiecke).
b) Betrachte zusätzlich den Winkel zwischen der Tangente am Kreis K in A und der Sehne AB.
Beweise auch hier, dass der Tangentenwinkel zur Sehne gleich Phi ist.

13. Sehnensatz: Zwei Sehnen schneiden sich in einem Kreis im Punkt P.
Lass dir die Sehnenabschnitte a,b auf der einen Sehne und c,d auf der anderen Sehne messen. Stelle die Verhältnisse auf: a * b und c * d. Was stellt man fest? Kannst du einen Beweis finden? (Nutze die Erkenntnisse aus Nr. 15)

14. Sekantensatz: Zwei Sekanten g und h schneiden einen Kreis k in den Punkten A, B und C, D. Die Sekanten g und h schneiden sich gegenseitig im Punkt P.
Überprüfe nun die Verhältnisse PA*PB und PC*PD.
Beweise diesen Satz. (Nutze wiederum Nr. 15)

15. Sekanten-Tangentensatz: Nimm statt zweier Sekanten nun eine Sekante und eine Tangente, die vom gemeinsamen Punkt P aus den Kreis K schneiden. Die Tangente berührt den Kreis K im Punkt C. Überprüfe die Verhältnisse PA*PB und PC*PC. Beweise diesen Satz.

16. Konstruiere nochmals Nr. 14.
Ziehe nun den Punkt C genau auf den Punkt D. Was passiert?

17. Konstruiere den Schwerpunkt S, den Umkreismittelpunkt U, und den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks ABC. Verziehe das Dreieck und beobachte diese drei Punkte. Was stellst du fest?

18. Konstruiere folgende **Neun Punkte**:
Konstruiere von einem Dreieck die Mittelpunkte aller Seiten, Ma, Mb, Mc. Konstruiere dann die Höhen und deren Höhenfusspunkte Fa, Fb, Fc. Des Weiteren konstruiere die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte Ha, Hb, Hc. (das sind die Mittelpunkte der Strecken zwischen jeweils einer Dreiecksecke und dem Höhenschnittpunkt.)
Verziehe das Dreieck und beobachte die Neun Punkte.
Markiere den Höhenschnittpunkt H und den Umkreismittelpunkt U.

19. Forschungsaufgabe zur Kreiszahl Pi = 3,14…

Eine in der Antike lange ungelöste Aufgabe war den Kreisumfang möglichst genau zu berechnen. Archimedes (287 v Chr.) hatte die gute Idee, den Kreisumfang mit Hilfe von regelmässigen n-Ecken anzunähern. Der Umfang des einbeschriebenen n-Ecks kommt dem Kreisumfang beliebig nahe.

Erstelle in Geogebra einen Kreis um M(6/7) (zunächst mit Radius 10, später mit beliebigem Radius).
Konstruiere ein regelmässiges 6-Eck in den Kreis.
Färbe den Umfang des 6-Ecks rot. Lass Geogebra den Umfang dieses 6-Ecks berechnen. Berechne dir nun aus dem Umfang U = 2*r*Pi den Näherungswert von Pi.

Überlege dir, wie du folgende Umfänge berechnen lassen kannst:
12Ecks, 24 Eck, 48 Eck, n-Eck
Nutze evtl. Schieberegler.

Weiterführende Aufgabe:
Ohne Geogebra: Ein n Eck sei gegeben mit der Seitenlänge s_n.
Berechne die Seitenlänge s_{2n} eines 2n-Ecks aus der Seitenlänge s_n diese n-Ecks..

Wenn man nun n=6 setzt d.h. $s_6 = 1$ setzt, erhält man als Umfang n*s1 = 6 = U_1
Mit n=12 ergibt sich s_{12} und 2n* s_{12} ergibt sich Umfang U_{12}.
Nähere Dich so dem Kreisumfang und damit Pi rekursiv an.
(vgl. „Aufgabenblatt Die Einschachtelung von Pi")

Stelle folgende Volumen gegenüber und vergleiche sie:
Zylinder, Kugel, Kegel. Was stellt man fest?

Bearbeitung zu den verschiedenen Funktionstypen:

Bearbeite die jeweiligen Situationen und formuliere dann (z.B. in Dein Theorieheft) welchen Einfluss die einzelnen Parameter (d.h. die Schiebereglervariablen) auf das Schaubild haben.

Lineare Funktion:

20. Erstelle zwei Schieberegler und nenne sie m und q.
Gib in die „Eingabe-Zeile“ ein: y = m*x+q
Weitere Eingabe: y = 1*x +0 (färbe diese einfachste lineare Funktion grün.)
Verändere die Schieberegler und formuliere die Auswirkung von m und q auf das Schaubild in Worten.

Potenzfunktionen:

Untersuche folgende Funktionen mit Hilfe von Schiebereglern

21. Erstelle die Parabel $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit den Schiebereglern a,b,c
Die Nullstellen von f(x) können wir bekanntlich mit der Mitternachtsformel bestimmen. Erstelle die Schnittpunkte mit der x-Achse. Berechne mindestens zwei Mal die Nullstellen einer Parabel von Hand und vergleiche sie mit dem Schaubild der Kurvenschar und den Parametereinstellungen der Schieberegler a,b,c.
Erstelle nun ein Textfeld und gib die Nullstellen aus.
(vgl. Berechnungen in einem Textfeld erstellen am Dokumentanfang)

22. Parabel: $f(x) = a \cdot (x+d)^2 + e$ Erstelle den Punkt P[{-d,e}]
Den Punkt P (- d / e) nennt man Scheitelpunkt der Parabel.
Der Scheitelpunkt einer Parabel liegt genau zwischen den beiden Nullstellen, da die Parabel achsensymmetrisch ist zur Achse durch den Scheitelpunkt.
Begründe, warum die x-Koordinate vom Scheitelpunkt S die x-Koordinate x = -b/(2a) hat.

23. Potenzfunktionen $g(x) = a \cdot x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ darstellen:
Setze zunächst den Schieberegler für a=0 und b=0 und c=0. Dann hat man eine Parabel, d.h. eine Potenzfunktion zweiten Grades mit nur einer "Schwingung".
Nimm nun $c \neq 0$ hinzu. Erkenne, dass eine Potenzfunktion pro Grad eine zusätzliche "Schwingung" mehr macht.

24. Hyperbeln: $h(x) = a \cdot (x+b)^{-t} + c$

Erkenne, dass eine senkrechte Asymptote vorliegt. Wo ist sie jeweils?
Gibt es auch eine waagrechte Asymptote?
Gib die Gleichungen der Asymptoten an.

25. Gib die Gleichung einer Hyperbel an, die die senkrechte Asymptote bei x = 3 hat und die eine waagrechte Asymptote bei y = - 4 hat. Prüfe dies mit Geogebra.

26. Schneide $f(x) = 1{,}4 \cdot x^2 + 2$ und $p(x) = a \cdot x^4 - a \cdot x^2 + 1$

Erstelle den Schieberegler a und die Funktionen f und p. Lasse dann Geogebra die Schnittpunkte erstellen.

a) Für welchen Wert von a schneiden sich die beiden Funktionen bei der x Koordinate x=1,3? Lösung: a = 2,8865 S_1(-1,3/4,37) S_2(1,3/4,37)

b) Für welchen Wert von a hat die Funktion p genau zwei Nullstellen?
Lösung: a = 4 N_1(-0,7071 / 0) N_2(0,7071 / 0)

27. Welche Parabel mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x - 2$

hat den Scheitel bei S(8/ y)? Probiere zuerst mit Geogebra und berechne dann b und die y-Koordinate des Scheitels S. Lösung: b = -4 S(8 / -18)

28. Gibt es eine Parabel mit der Gleichung $h(x) = a \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1$, die die Gerade $y = \frac{1}{4} \cdot x - 8{,}5$ im Punkt S(10 / -6) schneidet? Falls ja, berechne den Parameter a dieser Parabel, und allenfalls den zweiten Schnittpunkt?
Falls nein, begründe warum es nicht geht.

Lösung: a= -0,35 mit Punktprobe oder Schnitt

Wurzelfunktion

29. $f(x) = a \cdot \sqrt{x+d} + e$

Trigonometrische Funktionen:

30. Trigonometrische Funktionen z.B: f(x)= a*sin(b*x) oder g(x)= a*cos(b*(x+c))+d
31. Erstelle einen Einheitskreis und demonstriere mit Schiebereglern die Zusammenhänge:

a) $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

b) $\sin(\alpha)=\cos(90°-a)$

c) Berechne im Einheitskreis die Länge des Kreisbogens b in Abhängigkeit zum Winkel Alfa. Zeige, dass gilt: $b=\frac{\alpha}{360°}2\cdot\pi$

d) Bei Interesse weitere trigonometrische Zusammenhänge erforschen.

Arcus-Funktionen, dh. Umkehrfunktionen zu den Trigo. Funktionen:

32. Erstelle die Arcsin() Arccos() und ArcTan() Funktion.

Exponentialfunktion:

33. $f(t)=a\cdot q^t$
34. a) Ein Kapital von 107’000 Fr. wird mit 2,25% pro Jahr verzinst. Wann ist es auf über 1’000’000 Fr. angewachsen. Löse diese Aufgabe mit Geogebra, lies die Lösung ab. Löse dann algebraisch. (Jost Bürgi lässt grüssen). 100,44 Jahre
b) Welcher Zinssatz müsste gelten, damit die die 1000'000 Fr. in der Hälfte der Zeit erreicht werden? Löse mit Schieberegler und dann algebraisch. 4,5508%

Logarithmusfunktion:

35. Erstelle die Logarithmusfunktion $f(t)=a\cdot\log(x+b)+c$
Erkenne die Bedeutung der Parameter a,b,c

36. $f(x)=3\cdot\log_3(x)$ $\quad g(x)=2\cdot\log_3(x+2)-2$ $\quad h(x)=3-\log_5(x-2)$
Zeichne diese 3 Logarithmusfunktionen. Berechne die Schnittpunkte dieser drei Funktionen. Berechne mit Geogebra (und von Hand falls möglich) die Fläche, die diese Funktionen miteinander einschliessen. Lösung: vgl. Algebra S. 81 Nr. 95

Differentialrechnung:

37. Tangente an Parabel konstruieren
38. Tangentenschar an Parabel erstellen
39. Tangente an Parabel durch Punkt P ausserhalb der Parabel.
40.
41.
42.

Integralrechnung:

43. Berechne die Fläche unter einer Funktion $p(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + cx^2 + d$ zwischen x=1 und x=3. Prüfe es durch eigene Rechnung.
44.
45.
46.
47.
48.
49.

Forschungsaufgabe:

Beim Variantenskifahren ist die Lawinengefahr zu kalkulieren. Man weiss, dass unter 30° Hangneigung selten Spontanlawinen abgehen.
Du stehst nun mitten im Neuschneehang:

a) Wie kann man mit einfachen Mitteln prüfen, ob der Hang 30° hat?

b) Wie kann man mit einfachen Mitteln die Hangneigung messen?
Konstruiere zu a) und b) eine solche Messsituation und formuliere je eine „Betriebsanleitung“

c) Nutze nun ein gleichseitiges Skistockdreieck
(vgl. Info Hangneigungsmessung) und konstruiere die Situation in Geogebra und baue einen Schieberegler ein, der die Hangneigung steuert.